

2.3.5 Nerovnice v podílovém tvaru I

Předpoklady: 2303, 2304

Pedagogická poznámka: Nerovnice v podílovém tvaru jsem původně probíral v jediné hodině. Studenti s ní měli velké problémy. Nakonec jsem si uvědomil, že se v této hodině opakují dvě látky zcela zásadní v dalším studiu – součinný tvar nerovnic a řešení nerovnice rozdělením definičního oboru a tak jsem hodinu rozdělil. U několik úvodních nerovnic je uvedena tabulková metoda, studenti samozřejmě mohou používat i libovolné urychlení. V dalších příkladech pak do rychlejšího postupu nutím všechny. V písemkách (i dalších hodinách) pak mohou používat cokoli.

Pedagogická poznámka: Následující příklad opravdu zadávám bez jakéhokoliv vysvětlení a snažím se studenty dovést k tomu, že se dá hodně samostatně vymyslet, když si člověk umí všimnout podstatných věcí.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{x-3}{3x-2} \geq 0$.

V příkladu je zlomek $\Rightarrow$ musíme udělat podmínky: $3x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{2}{3}$.

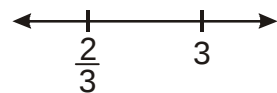
Nápad: Příklad trochu připomíná nerovnice v součinném tvaru (například $(2-3x)(x+1) > 0$).

Stejně rysy:

- Na pravé straně nula $\Rightarrow$ záleží pouze na znaménkách výrazů v čitateli a jmenovateli.
- Dělení záporným číslem (stejně jako násobení záporným číslem) obrací znaménko výsledku (je to vlastně samozřejmé $\frac{x-3}{3x-2} = (x-3) \cdot \frac{1}{3x-2}$ dělení je násobení převráceným číslem).

$\Rightarrow$ Jde o fakticky „stejně“ příklady $\Rightarrow$ stejný postup.

Nulové body: $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ $x-3=0 \Rightarrow x=3$



	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}; 3\right)$	$(3; \infty)$
$(3x-2)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$\frac{x-3}{3x-2}$	+	-	+

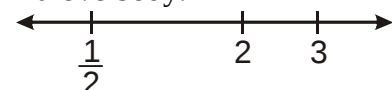
$\frac{2}{3}$ je vyloučeno podmínkou, 3 patří mezi řešení, protože nerovnost obsahuje $\geq$.

$$K = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \langle 3; \infty \rangle$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x-3}{(2-x)(2x-1)} \leq 0$.

Podmínky: $2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Nulové body:



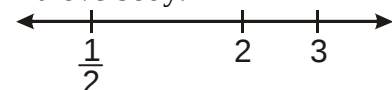
intervaly:	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; 2\right)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$x-3$	-	-	-	+
$2-x$	+	+	-	-
$2x-1$	-	+	+	+
výsledky:	+	-	+	-

$$K = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \langle 3, \infty \rangle$$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\frac{(2-x)(2x-1)}{(x-3)} \leq 0$.

Podmínky: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Nulové body:



Postřeh: Stejně nulové body i stejné závorky jako v předchozím příkladě, jenom jinak rozmístěné ve zlomku $\Rightarrow$ využijeme tabulku předchozího příkladu, jenom se změní hrany intervalů.

$$K = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup (3, \infty)$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má význam ze dvou důvodů:

Studenti se učí všimnout si a šetřit si práci.

Studenti se učí, jak řešit hrany intervalů bez toho, aby ztráceli čas vyplňováním tabulky.

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů už mají studenti zakázané používání tabulek. Jde o to, aby si procvičili rychlejší styl řešení nerovnic v součinném tvaru. Při písemce pak samozřejmě mohou používat libovolný postup.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\frac{(x+1)(x-3)}{1-2x} \geq 0$.

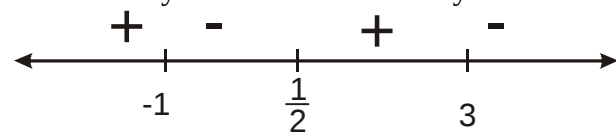
Podmínky: $1-2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\begin{array}{ccc} - & - & + \\ \nearrow & \nearrow & \searrow \end{array}$

$$(x+1)(x-3) \frac{1}{1-2x} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



$$K = \left(-\infty; -1\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\frac{2x+1}{(3-x)(1-x)} \geq 0$.

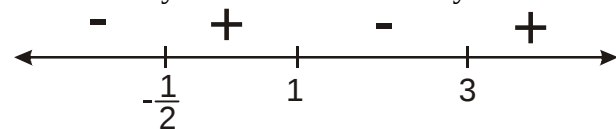
Podmínky: $3-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\begin{array}{ccc} - & + & + \\ \nearrow & \searrow & \searrow \end{array}$

$$(2x+1) \cdot \frac{1}{3-x} \cdot \frac{1}{1-x} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



$$K = \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; \infty)$$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \geq 0$.

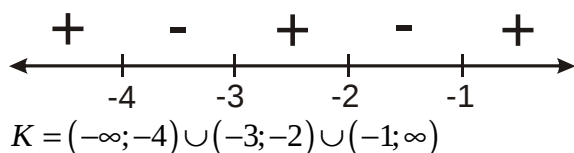
Podmínky: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$, $x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \end{array}$

$$\frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{1}{(x+2)} \cdot \frac{1}{(x+3)} \cdot \frac{1}{(x+4)} \geq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu:



Př. 7: Vyřeš nerovnici $\frac{2-x}{(x+2)(x-2)(x+3)} \leq 0$.

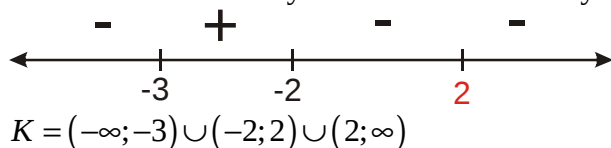
Podmínky: $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\searrow \nearrow \nearrow \nearrow$

$$(2-x) \frac{1}{(x+2)} \cdot \frac{1}{(x-2)} \cdot \frac{1}{(x+3)} \leq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod 2 si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se tedy nezmění.



Př. 8: Vyřeš nerovnici $\frac{(1-x)(3-x)}{(x^2-9)(x^2+3)} \leq 0$.

Podmínky: $x^2-9 = (x-3)(x+3) \Rightarrow x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$,

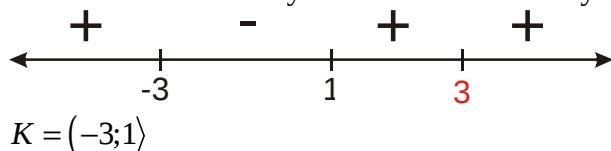
$x^2+3 > 0$ platí vždy $\Rightarrow$ výraz x^2+3 nebudeme sledovat.

Přepíšeme si nerovnici do součinnového tvaru, vyznačíme si druhy funkcí a znaménko

v prvním intervalu: $\searrow \searrow \nearrow \nearrow$

$$(1-x)(3-x) \cdot \frac{1}{(x-3)} \cdot \frac{1}{(x+3)} \leq 0$$

Nulové body a znaménka celého výrazu. Bod 3 si nakreslíme červeně, protože v něm mění znaménko dvě závorky a znaménko celého výrazu se tedy nezmění:



Př. 9: Petáková:
strana 12/cvičení 3 d) e) f)

Shrnutí: Řešení nerovnic v podílovém tvaru silně připomíná řešení nerovnic v součinnovém tvaru.