

1. Kvadratická funkce, kvadratická rovnice, kvadratická nerovnice

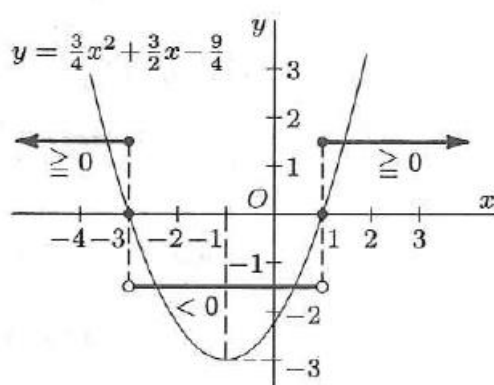
1.1. Grafy kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic

Mějme kvadratickou funkci $f: y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$, kterou můžeme upravit doplněním na čtverec do vhodnějšího tvaru $f: y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3$. Dále pomocí grafu zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} > 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} < 0$$



Z grafu je patrné, že kvadratická rovnice je rovna nule pro $x = -3$ a $x = 1$. To lze zjistit také pomocí nalezení kořenů kvadratické rovnice za pomoci diskriminantu.

Z grafu je dále patrné, že kvadratická rovnice je větší jak nula právě tehdy, když se funkce nachází nad osou x . To je v případě, že $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

Z grafu také vyplývá, že kvadratická rovnice je menší jak nula právě tehdy, když se funkce nachází pod osou x . To je v případě, že $x \in (-3; 1)$.

Příklad

Řešte kvadratickou nerovnici $2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1$ s neznámou v $\mathbb{R}$.

Jako první je nutné upravit nerovnici tak, aby na pravé straně byla 0:

$$-x^2 - x + 6 \leq 0$$

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

Je často výhodné mít koeficient a roven jedné. Nyní vypočteme diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

Diskriminant vyšel větší jak nula. To znamená, že graf funkce bude mít dva různé průsečíky s osou x . Pokud by $D = 0$, pak by se kvadratická funkce dotýkala osy x pouze v jednom bodě (vrcholu). Pokud

by D byl menší jak nula, pak by neexistoval průsečík s osou x a graf funkce by byl kompletně nad osou x (v případě, že $a > 0$) nebo kompletně pod osou x (v případě, že $a < 0$).

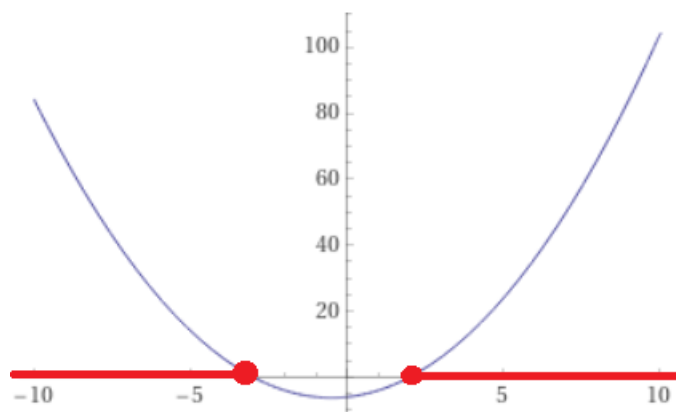
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Kvadratický člen mohu zapsat obecně takto: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. V našem případě tedy vypadá platí $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Pokud přepíšeme do tvaru nerovnice, dostáváme:

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$(x - 2)(x + 3) \geq 0$$

Vzhledem k tomu, že koeficient a je větší jak nula, pak můžeme tvrdit, že funkce bude mít tvar misky. V opačném případě (a by bylo menší jak nula) by se jednalo o kopeček. Funkce protíná osu x bodech 2; -3.



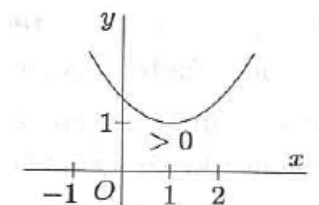
Řešením kvadratické nerovnice $2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1$ je tedy interval $x \in (-\infty; -3 \cup 2; \infty)$.

Příklad

Stejnou metodou řešte kvadratickou nerovnici $0,5x^2 - x + 1,5 > 0$.

Vyřešíme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 1,5 = 1 - 3 = -2$.

Diskriminant vyšel záporný, tedy kvadratická funkce neprotne osu x . Je otázka, zda se celý graf nachází nad osou x nebo pod ní. Vzhledem k tomu, že $a > 0$, bude graf nad osou x .



Nás zajímalo, kdy je $0,5x^2 - x + 1,5 > 0$, a to platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Úlohy

4.16 Z grafu funkce $y = x^2 - 4$ zjistěte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

b) $x^2 - 4 \geq 0$

d) $x^2 - 4 \leq 0$

4.17 S využitím grafů kvadratických funkcí řešte tyto kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

b) $2x^2 - 5x + 2 < 0$

d) $x^2 - 2x + 3 < 0$

Úlohy k opakování

4.18 Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

a) $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 1)^2 - 1$

b) $y = -2x^2$, $y = -2(x+3)^2$, $y = -2(x-3)^2$, $y = 2(x-3)^2$

4.19 Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = 0,5x^2 - x + 2$ b) $y = 0,5x^2 + x + 2$ c) $y = -0,5x^2 - x - 2$

4.21 Uveďte příklad kvadratické funkce, pro kterou platí jedna z dále uvedených podmínek:

a) je shora omezená a není sudá;

b) má minimum v bodě -2 , její graf má s osou x dva různé společné body;

c) je rostoucí v intervalu $(-\infty, 1)$, klesající v intervalu $(1, +\infty)$,
v bodě 1 je její funkční hodnota rovna -2 .

4.24 Řešte tyto kvadratické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } 2x^2 + 7x - 15 \geq 0, \quad 2x^2 + 7x - 15 < 0;$$

$$\text{b) } -x^2 - 3x + 10 \leq 0, \quad -x^2 - 3x + 10 > 0.$$

4.16 a) $x_1 = 2$.

$x_2 = -2$; б) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; в) $x \in (-2, 2)$; г) $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

4.17 a) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$; b) $x \in (0, 5; 2)$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) žádné řešení.

4.21 Např. a) $y = -(x-1)^2$; b) $y = (x+2)^2 - 3$; c) $y = -(x-1)^2 - 2$.

4.24 a) $x \in (-\infty; -5) \cup (1, 5; +\infty)$, $x \in (-5; 1, 5)$;

b) $x \in (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$, $x \in (-5, 2)$.

1.2. Soustava lineární a kvadratické rovnice

Postup řešení:

- z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou
- vyjádřenou neznámou dosadíme do kvadratické rovnice
- kvadratickou rovnici o dané neznámé řešíme běžnými metodami
- vypočítáme hodnoty druhé neznámé, nejlépe z lineární rovnice

Příklad

Řešte soustavu lineární a kvadratické rovnice o 2 neznámých v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Nejprve vyjádříme z lineární rovnice neznámou.

$$x = 1 + y$$

Následně vyjádřenou neznámou dosadíme do druhé rovnice (kvadratické).

$$(1 + y)^2 + y^2 = 25$$

$$1 + 2y + y^2 + y^2 = 25$$

$$2y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$y^2 + y - 12 = 0$$

Pomocí diskriminantu zjistíme kořeny kvadratické rovnice.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

Kvadratická rovnice bude mít právě dva kořeny.

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ y_2 = -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

Následně dosadíme hodnoty y_1 a y_2 do lineární rovnice v zadání.

$$x_1 = 1 + y_1 = 1 + 3 = 4$$

$$x_2 = 1 + y_2 = 1 - 4 = -3$$

Následně zapíšeme výsledek:

$$K = \{[4; 3]; [-3; -4]\}$$

Zkouška → dosadte obě dvojice řešení do zadání.

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+x-y%3D1%2C+x%5E2%2By%5E2%3D25>

solve $x-y=1$, $x^2+y^2=25$



 Extended Keyboard

 Upload

 Examples

 Random

Input interpretation:

solve

$$x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Results:

$$x = -3 \text{ and } y = -4$$

$$x = 4 \text{ and } y = 3$$

Příklad můžeme vyřešit také graficky.

Příklady

a) $y - 2x = 5$

$$x^2 + y^2 = 5$$

b) $x + y = -2$

$$x^2 + y^2 = 1$$

c) $x^2 + y^2 = 4$

$$x + 2y - 4 = 0$$

d) $x^2 + y^2 + 3x = 4$

$$x - 2y = -4$$

Správné řešení ověřte na www.wolframalpha.com

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\underline{x + 2y = 4}$$

$$5xy - y^2 + 14 = 0$$

$$\underline{2x - y - 4 = 0}$$

1.3. Kvadratická a lineární rovnice vyřešena graficky

Pokud máme kvadratickou a lineární rovnici, lze jejich soustavu vyřešit také pomocí grafické metody. Povšimněme si předešlého příkladu, ve kterém se nachází výraz $x^2 + y^2 = 25$. To je předpis pro kružnici. V dalším příkladu máme ale už předpis lineární a kvadratické funkce.

$$4x + 2y - 6 = 0$$

$$x^2 - y = 0$$

$$y = \frac{6 - 4x}{2}$$

$$y = x^2$$

$$y = 3 - 2x$$

$$y = x^2$$

Nejprve počteně. Dosadíme lineární rovnici do kvadratické.

$$3 - 2x = x^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

Kvadratická rovnice bude mít právě dva kořeny.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Následně dosadíme hodnoty x_1 a x_2 do lineární rovnice v zadání.

$$y_1 = 3 - 2x_1 = 3 - 2 = 1$$

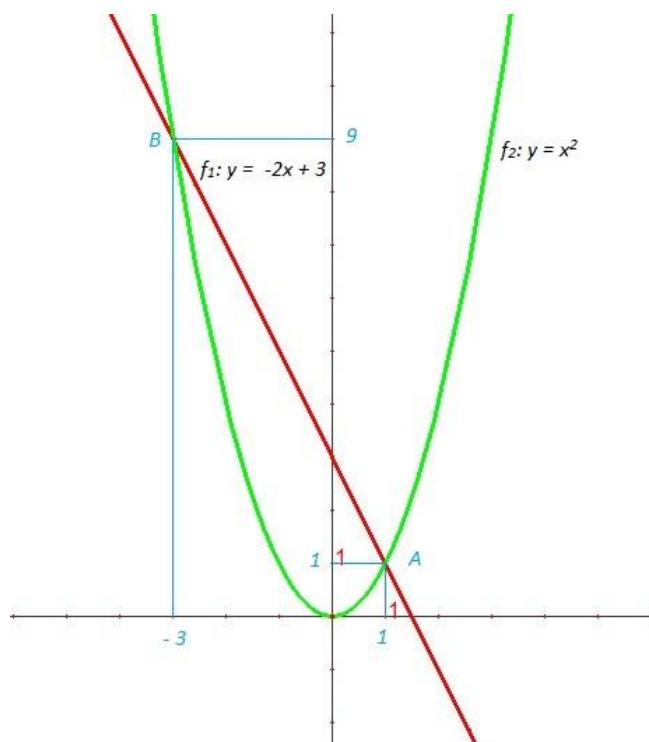
$$y_2 = 3 - 2x_2 = 3 + 6 = 9$$

Následně zapíšeme výsledek:

$$K = \{[1; 1]; [-3; 9]\}$$

Zkouška → dosadte obě dvojice řešení do zadání.

Nyní vyřešíme graficky. Narýsujeme si grafy funkcí a průsečíky obou funkcí jsou výsledky naší soustavy.



Další příklad: vyřešte soustavu rovnic

$$y = x^2$$

$$\underline{xy = 8}$$

1.4. Kvadratická nerovnice v součinném tvaru

Kvadratická nerovnice v součinném tvaru má tvar $(x + 2)(2x - 1) \geq 0$.

Při řešení tohoto typu kvadratické nerovnice je důležité, aby na pravé straně byla vždy nula. Poté zjišťujeme, kdy součin závorek je kladný a kdy záporný.

	$(-\infty; -2)$	$\left(-2; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
$(x + 2)$	-	+	+
$(2x - 1)$	-	-	+
$(x + 2)(2x - 1)$	+	-	+

Kde jsme vzaly intervaly? Vzali jsme je vyjádřením x ze závorek. Tedy $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ a z druhé závorky $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Následně do jednotlivých výrazů dosadíme libovolné číslo z intervalů a zjistíme, zda výsledná hodnota je záporná nebo kladná. Součin $+$ a $-$ je pak záporné znaménko, v opačném případě kladné.

Nás zajímá, kdy je součin kladný. To nastane v případě součinu $- a -$ nebo $+ a +$. Tedy výsledek nerovnice je interval $K = (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Pozor, v zadání je větší nebo rovno, tedy krajní body se musí v intervalu nacházet.

1.5. Kvadratická nerovnice v podílovém tvaru

Kvadratická nerovnice v podílovém tvaru má tvar například $\frac{2x+1}{x^2-4x+3} \geq 0$. Jako první si určíme definiční obor a převedeme čitatele nebo jmenovatele (dle potřeby) do součinného tvaru.

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-1)} \geq 0$$

Tento tvar jmenovatele bychom dostali výpočtem diskriminantu a kořenů kvadratické rovnice. Ze jmenovatele také vyčteme, že definičním oborem bude $\mathbb{R} - \{1; 3\}$. Nastává otázka, kdy bude zlomek větší jak 0. To nastane tehdy, pokud čitatele bude $+$ a jmenovatel $+$ nebo čitatele $-$ a jmenovatel $-$. Současně také musíme zjistit, kdy bude jmenovatel kladný a kdy záporný. To bude za předpokladu, kdy obě závorky budou buď kladné nebo záporné zároveň.

ČITATEL

$$2x + 1 \geq 0$$

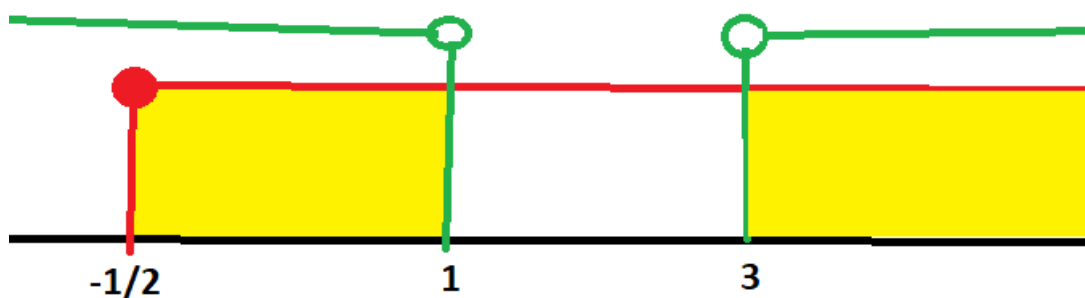
	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$
$2x + 1$	-	+

JMENOVATEL

	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x - 1$	-	+	+
$(x - 3)(x - 1)$	+	-	+

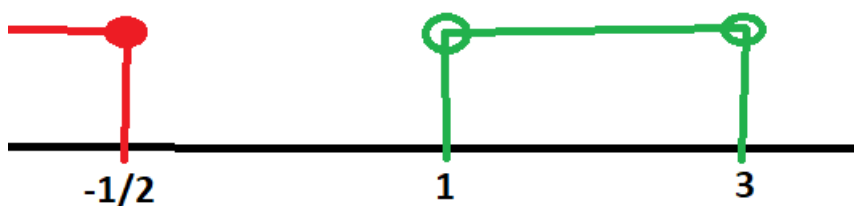
$$\frac{2x + 1}{(x - 3)(x - 1)} \geq 0$$

Nejprve zjistíme, kdy je čítec i jmenovatel kladný zároveň.



Červený interval je pro čitatele – plné kolečko nám vyjadřuje, že výsledek může být i nulový. Zelený interval je pak jmenovatel, který musí být nenulový. Tedy $K_1 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; \infty)$

Nyní případ, kdy čítec i jmenovatel bude záporný zároveň.



Vidíme, že k průniku intervalů nedošlo. $K_2 = \emptyset$. Výsledek je potom $K_1 \cup K_2 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; \infty)$