

1. Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ (tj. o definičním oboru $\mathbb{R}$) ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c,$$

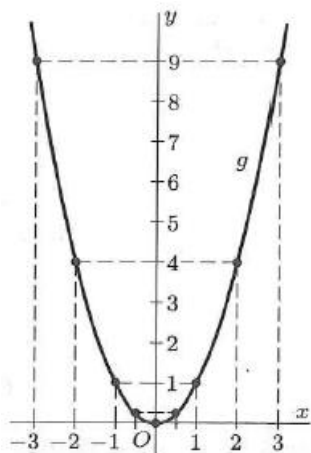
kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$.

Příklad

Narýsujte graf kvadratické funkce $g: y = x^2$.

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
x^2	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

Grafem kvadratické funkce je nepřerušovaná čára zvaná parabola. Z tabulky a grafu lze usoudit, že oborem hodnot je interval $\mathbb{R}_0^+$, tedy interval $[0; \infty)$. Funkce je v intervalu $(-\infty; 0]$ klesající, v intervalu $[0; \infty)$ rostoucí. Funkce má v bodě 0 minimum, žádné maximum funkce nemá. Funkce je zdola omezená, shora není omezená. Funkce je sudá.

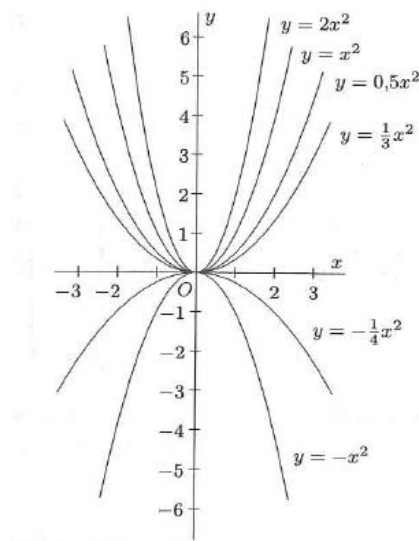


Příklad

V předešlém příkladu vidíme, že koeficient $a = 1, b = 0, c = 0$. Co se stane ale v případě, že koeficienty b, c zůstanou nulové, koeficient a se ale začne měnit?

Pokud koeficient a bude záporný, parabola se překlopí podle osy x . Pokud koeficient $a < 1$, pak se bude graf více přibližovat ose y a stoupání (klesání) bude prudší. V případě, že $a > 1$, pak bude graf více rozevřen a stoupání (klesání) bude mírnější.

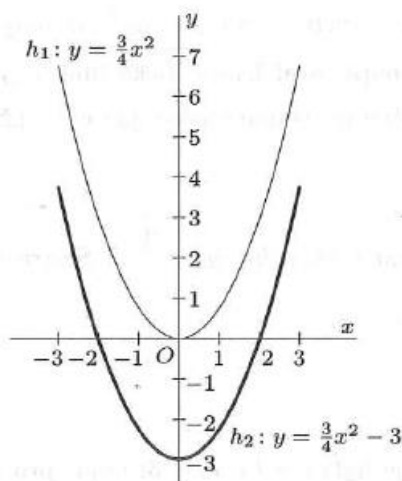
Na následujícím obrázku je graf $y = ax^2$.



Příklad – funkce ve tvaru $y = ax^2 + c$

Mějme graf funkce $h_1: y = \frac{3}{4}x^2$. Nyní sestrojme pomocí tohoto grafu nový graf $h_2: y = \frac{3}{4}x^2 - 3$.

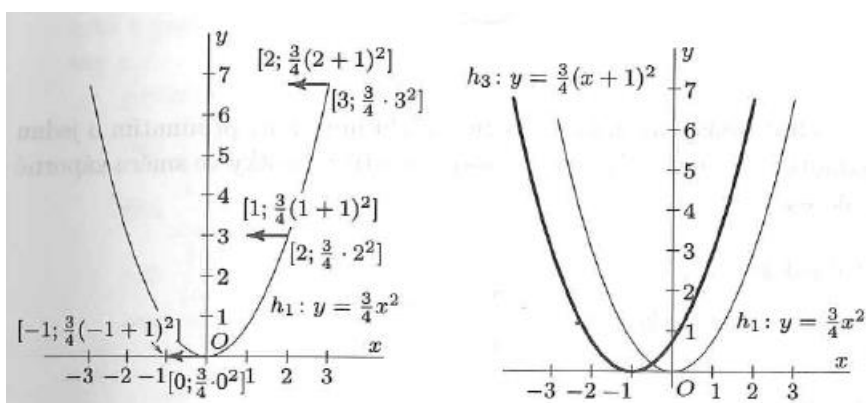
Vidíme, že se změnil pouze koeficient $c = -3$. Pro ostatní koeficienty platí $a = \frac{3}{4}, b = 0$.



Koeficient c posouvá graf funkce ve směru osy y . V našem případě je $c = -3$, tedy posun vrcholu do bodu -3 .

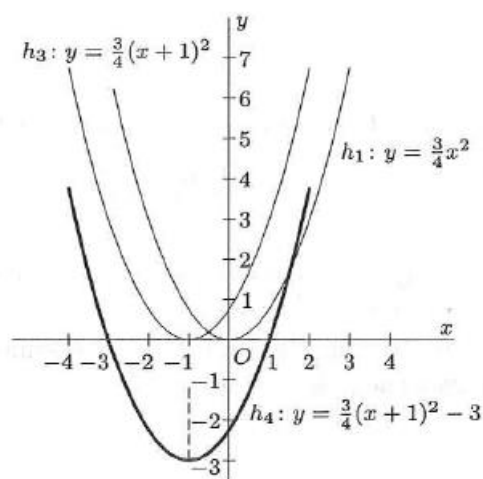
Příklad – funkce ve tvaru $y = a(x + d)^2$

Opět využijeme funkci $h_1: y = \frac{3}{4}x^2$. Budeme hledat podobu funkce $h_2: y = \frac{3}{4}(x + 1)^2$. V tomto případě posuneme graf funkce o jednu jednotku v záporném směru.



Příklad – funkce ve tvaru $y = a(x + d)^2 + c$

Opět využijeme funkci $h_1: y = \frac{3}{4}x^2$. Nyní budeme hledat podobu funkce $h_3: y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3$. Jedná se o kombinaci dvou předešlých případů. Nejprve posuneme graf funkce $y = \frac{3}{4}x^2$ o 3 jednotky ve směru osy y směrem dolů, poté díky závorce posuneme graf funkce o jednu jednotku v záporném směru osy x .



Příklad – funkce ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, doplnění výrazu na čtverec

Sestroj graf funkce $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$. Jednou z možností, jak sestrojit graf funkce, je doplněním výrazu na čtverec, neboli doplnění na druhou mocninu dvojčlenu.

$$y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$$

Nejprve upravíme výraz $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ tak, aby bylo x^2 osamostatněno. Tedy:

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}(x^2 + 2x) - \frac{9}{4}$$

Důležité je si povšimnout **prvních dvou členů** v závorce, které jsou základem pro vzorec:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ nebo } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

V našem případě bude díky kladnému koeficientu $b = \frac{3}{2}$ využít vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Upravíme závorku $x^2 + 2x$ na tvar využívající druhé mocniny závorky. Víme, že $a = 1$, $2ab = 2$. Z toho tedy plyne, že

$$2ab = 2$$

$$ab = 1$$

$$b = 1$$

Pak tedy dostáváme: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ a to je vztah podobný vztahu v závorce $\frac{3}{4}(x^2 + 2x) - \frac{9}{4}$.

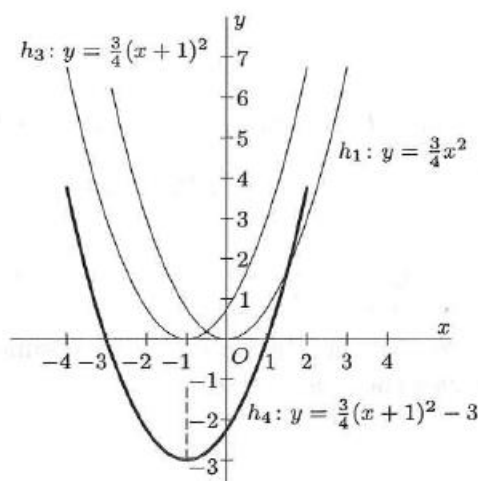
Dostáváme tedy

$$\frac{3}{4}(x^2 + 2x + 1) - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - \frac{3}{4} - \frac{9}{4}$$

Hodnotu $-\frac{3}{4}$ bylo nutné odečíst, jelikož rozložením vzorce bychom dostali o $\frac{3}{4}$ navíc. Pozor, je nutné nezapomenout na násobení $\frac{3}{4}$ před závorkou!!! Finální výraz má tvar:

$$y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3$$

Nyní můžeme narýsovat graf. Nejprve si pomocí tabulky hodnot uděláme graf pro funkci $y = \frac{3}{4}x^2$. Poté posuneme graf ve směru osy y směrem dolů o 3. Následně posuneme graf o -3 v záporném směru osy x .



V závěru ještě nastíníme vzorec pro výpočet vrcholu paraboly, který je dán vztahem:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$$

nebo pokud máme tvar paraboly ve tvaru doplněném na čtverec, pak platí, že souřadnice vrcholu jsou rovny:

$$y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3 \dots V = [-1; -3]$$

Povšimněme si, že x souřadnice zachovává znaménko, ale souřadnice pro y znaménko otáčí.

Dalšími faktory ovlivňující podobu paraboly jsou průsečíky s osou x a y . Nejprve začněme s průsečíkem s osou y , který je pro výpočet jednodušší. Povšimněme si na grafu funkce, jakou x -ovou souřadnici bude mít bod, kterým prochází funkce a zároveň protíná osu y ? To je možné pouze a jen tehdy, pokud $x = 0$. Stačí tedy za x dosadit 0 a získáme průsečík s osou y .

$$y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3$$

$$y = \frac{3}{4}(0 + 1)^2 - 3$$

$$y = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$$

Funkce prochází osou y v bodě $A = \left[0; -\frac{9}{4}\right]$. Dosazením do $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ dostaneme stejný výsledek.

Pro průsečík/průsečíky s osou x je výpočet složitější. Využijeme tzv. diskriminant a za y dosadíme 0. Pracujeme s prvním výrazem $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

Získáme tak kvadratickou rovnici:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} &= 0 \quad / \cdot \frac{4}{3} \\ x^2 + 2x - 3 &= 0\end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

Pokud by byl diskriminant větší než 0, pak bude mít kvadratická rovnice dva reálné kořeny, a tedy dva různé průsečíky s osou x .

Pokud by byl diskriminant roven 0, pak bude mít kvadratická rovnice dva totožné kořeny, a tedy jeden průsečík s osou x .

Pokud by byl diskriminant menší než 0, pak nemá kvadratická rovnice reálné kořeny, a tedy celý graf bude buď nad osou x ($a > 0$) anebo celý graf bude pod osou x ($a < 0$).

V našem případě dostaneme dva různé průsečíky s osou x . Dosadíme do vztahu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Výraz $ax^2 + bx + c$ lze zapsat jako $a(x - x_1)(x - x_2)$. Tedy $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Průsečíky pak mají souřadnice $X = [1; 0], Y = [-3; 0]$.

4.7 Načrtněte graf funkce $y = 1,5x^2$. Můžete ho nějak využít k sestrojení grafu funkce $y = -1,5x^2$?

Jaká je vzájemná poloha grafů funkcí $y = ax^2$, $y = -ax^2$ při daném $a \neq 0$?

[Využijte osovou souměrnost.]

4.8 Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

a) $y = x^2 + c$ pro $c = 0; 3; 2; -0,5$

b) $y = (x - k)^2$ pro $k = 0; 1; 2,5; -2; -1,5$

c) $y = (x - k)^2 + m$ pro $k = 1, m = 2; k = 1, m = -2; k = 1, m = 1,5$

d) $y = (x - k)^2 + m$ pro $k = -2, m = 2; k = -1, m = 2; k = 0,5, m = 2$

4.9 Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = -x^2 - 6x - 8$

c) $y = 2x^2 + 5x - 1$

d) $y = -0,5x^2 + x + 2$

Z grafů pak popište vlastnosti funkcí.

4.10 Dokažte, že hodnota funkce $y = x^2 - 4x + 5$ je v každém bodě kladné číslo. Načrtněte její graf a popište její vlastnosti.

4.14 Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

a) $y = x^2 - 2x - 2, y = |x^2 - 2x - 2|$

b) $y = -x^2 + 4x + 1, y = |-x^2 + 4x + 1|$

c) $y = 2x - 1, y = |2x - 1|$

U posledního příkladu nejprve narýsujte graf kvadratické funkce a následně úvahou narýsujte graf s absolutní hodnotou.

4.7 Grafy

jsou souměrně sdruženy podle přímky o rovnici $y = 0$. 4.9 a) V bodě 1 minimum, v intervalu $(-\infty, 1)$ klesající, v intervalu $(1, +\infty)$ rostoucí, není shora omezená, je zdola omezená. b) V bodě -3 maximum, v intervalu $(-3, +\infty)$ klesající, v intervalu $(-\infty, -3)$ rostoucí, je shora omezená, není zdola omezená. c) V bodě $-\frac{5}{4}$ minimum, v intervalu $(-\infty, -\frac{5}{4})$ klesající, v intervalu $(-\frac{5}{4}, +\infty)$ rostoucí, není shora omezená, je zdola omezená. d) V bodě 1 maximum, v intervalu $(-\infty, 1)$ rostoucí, v intervalu $(1, +\infty)$ klesající, je shora omezená, není zdola omezená. 4.10 $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$; v bodě 2 minimum, v intervalu $(-\infty, 2)$ klesající, v intervalu $(2, +\infty)$ rostoucí, je zdola omezená, není shora omezená.