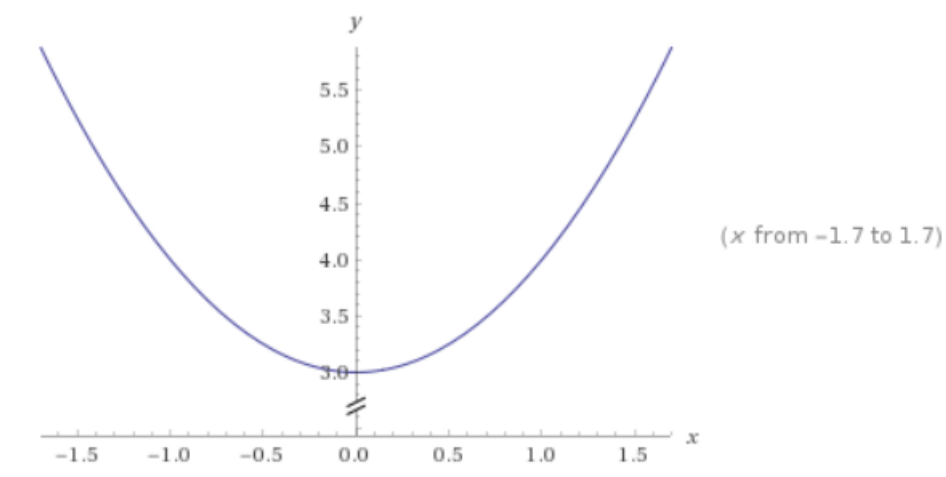


1. Funkce – sudá funkce, lichá funkce, omezenost funkce, maximum a minimum funkce

Funkce f se nazývá **sudá**, právě tehdy, když zároveň platí:

- $\forall x \in D_f: -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f: f(-x) = f(x)$

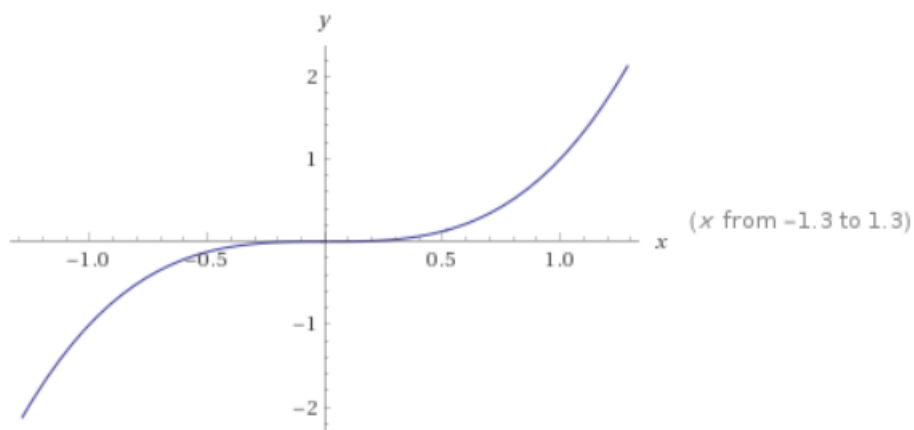
Z těchto podmínek vyplívá, že graf sudé funkce je vždy souměrný podle osy y .



Funkce f se nazývá **lichá**, právě tehdy, když zároveň platí:

- $\forall x \in D_f: -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f: f(-x) = -f(x)$

Z těchto podmínek vyplívá, že graf sudé funkce je vždy souměrný podle počátku.



Zjistěte, které z daných funkcí jsou sudé a které jsou liché:

$$s_1: y = 2x, x \in (-4, 5)$$

$$s_2: y = 2 - x$$

$$s_3: y = \frac{1}{x^3}$$

$$s_4: y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

Jako první určete definiční obor a zda je splněna podmínka $\forall x \in D_f: -x \in D_f$. Následně ověřte, zda platí podmínka pro sudou nebo lichou funkci. Ideální je zvolit si vhodně tabulku hodnot s hodnotami např. -3 a 3 ; -2 a 2 ; -1 a 1 ; 0 . Poté zjistíte, zda se funkční hodnota mění pouze ve znaménku např. u hodnot -3 a 3 , -2 a 2 ; -1 a 1 . Potom je to funkce lichá. Pokud se funkční hodnota nemění, jedná se o funkci sudou. Pokud jsou funkční hodnoty různé, funkce není ani sudá ani lichá.

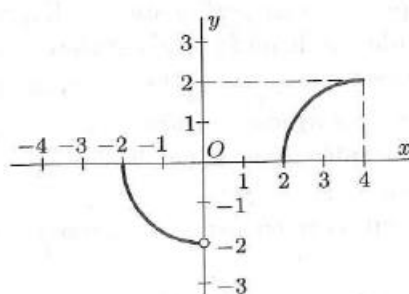
$$f: y = x^3$$

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	-27	-4	-1	1	4	27

Vidíme, že se jedná o funkci lichou. Funkční hodnoty pro -3 a 3 ; -2 a 2 ; -1 a 1 jsou stejné hodnoty, pouze s jiným znaménkem. Pokud by se hodnoty neměnily ve znaménku, jednalo by se o funkci sudou.

Uměli byste uvést příklad funkce na množině $\mathbb{R}$, která je sudá a zároveň lichá? Existuje jen jediná taková funkce?

- a) Na obr. 3.7 je sestrojena část grafu sudé funkce, jejíž definiční obor je množina $\langle -4, 0 \rangle \cup (0, 4)$. Načrtněte graf této funkce.



Obr. 3.7

- b) Analogický úkol řešte pro případ, že na obr. 3.7 je část liché funkce o definičním oboru $\langle -4, 0 \rangle \cup (0, 4)$.

Omezenost funkce

Funkce f se nazývá **zdola omezená**, právě když $\exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f: f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená**, právě když $\exists h \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f: f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **omezená**, pokud je omezená zdola i shora zároveň.

3.20 Uveďte příklad funkce, která

- a) je shora omezená, ale není zdola omezená;
- b) je zdola omezená, ale není shora omezená;
- c) není ani shora, ani zdola omezená.

3.21 a) Rozhodněte, zda platí: Každá konstantní funkce je omezená.

- b) Existuje lineární funkce, která není konstantní a přitom je shora omezená nebo zdola omezená?

Maximum a minimum funkce

Řekneme, že funkce f má v bodě a maximum, právě když $\forall x \in D_f: f(x) \leq f(a)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě b minimum, právě když $\forall x \in D_f: f(x) \geq f(b)$.

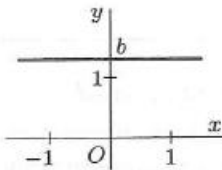
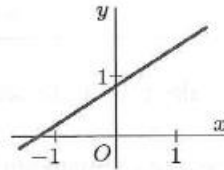
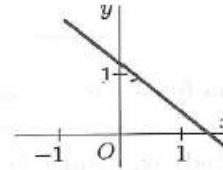
2 Má funkce $p: y = 3x$ v nějakém bodě maximum; minimum?

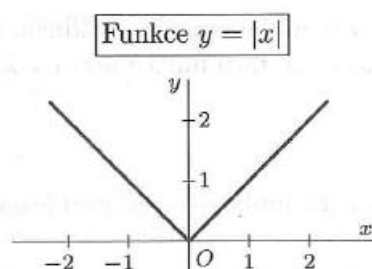
3.24 Ve kterých bodech má funkce $y = -|x|$ maximum; minimum?

3.25 Ve kterých bodech má konstantní funkce $y = 2$ maximum; minimum?

3.26 Rozhodněte, zda platí věta: Je-li funkce omezená, pak má v nějakém bodě maximum a v nějakém bodě minimum.

Přehled vlastností lineárních funkcí:

Funkce $y = ax + b$		
$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
		
Oborem hodnot je $\{b\}$. Není prostá, a tedy není ani rostoucí, ani klesající. Je omezená.	Oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Je rostoucí. Není ani shora, ani zdola omezená.	Oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Je klesající. Není ani shora, ani zdola omezená.
V každém $x \in \mathbb{R}$ má maximum a minimum.	Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.	Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.



Oborem hodnot je interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Je klesající v intervalu $(-\infty, 0)$, je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Je zdola omezená, není shora omezená. V bodě 0 má minimum, nemá v žádném bodě maximum.

3.27 Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = -2 \cdot |x|$ b) $y = 3 + |x|$ c) $y = |5 - 2x|$

Z grafů pak popište jejich vlastnosti.

3.28 Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $y = x + |3 - 2x|$
b) $y = |x + 2| - |x - 2|$, $x \in \langle -3, 7 \rangle$
c) $y = |x - 2| + |x - 5| - 2$

Z grafů pak popište jejich vlastnosti.

3.29 Načrtněte graf takové funkce, pro kterou platí:

- a) Její definiční obor je $(-2, 2)$, je lichá, je klesající.
- b) Její definiční obor je $\mathbb{R}$, je shora i zdola omezená, je sudá.
- *c) Její definiční obor je $\langle 0, 5 \rangle$, obor hodnot $\langle 0, 2 \rangle$, v bodě 1 má maximum, v bodech 0 a 3 minimum.

3.30 Rozhodněte, zda existuje nějaká funkce o definičním oboru $\langle -1, 1 \rangle$, která je sudá a zároveň prostá. Svůj závěr zdůvodněte.