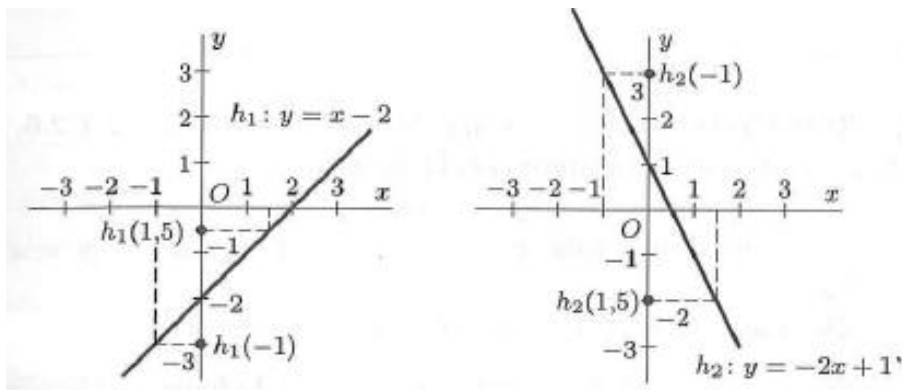


1. Funkce – monotonie funkce, některé vlastnosti lineární funkce, funkce s absolutními hodnotami

- Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá **klesající**, právě když $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



- Funkce f se nazývá **nerostoucí**, právě když $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá **neklesající**, právě když $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Mějme funkci f a interval J , který je částí jejího definičního oboru $J \subset D_f$.

Funkce f se nazývá **rostoucí na intervalu J** , právě když $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

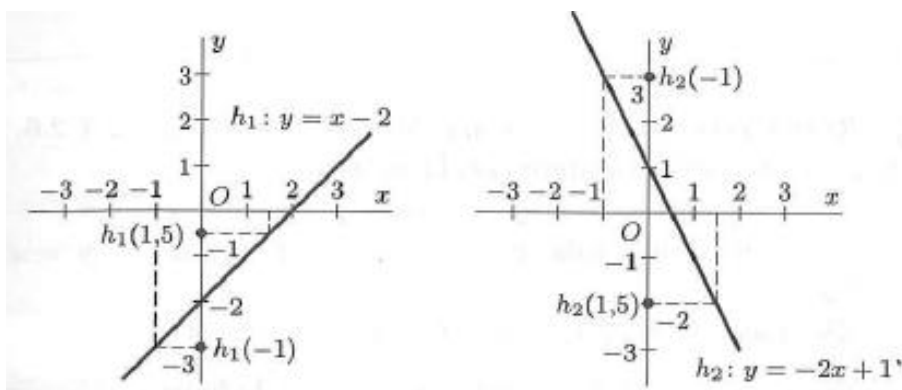
Funkce f se nazývá **klesající na intervalu J** , právě když $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **nerostoucí na intervalu J** , právě když $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

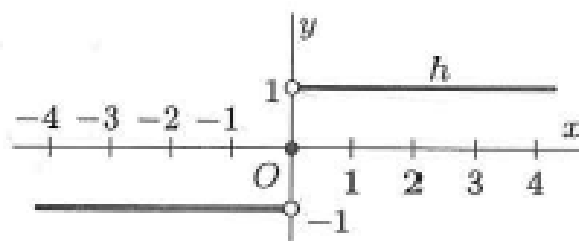
Funkce f se nazývá **neklesající na intervalu J** , právě když $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **prostá**, právě když $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Například tyto funkce jsou prosté, protože je splněna definice výše zmíněná.



Následující funkce prostá není, jelikož nesplňuje zmíněnou definici.

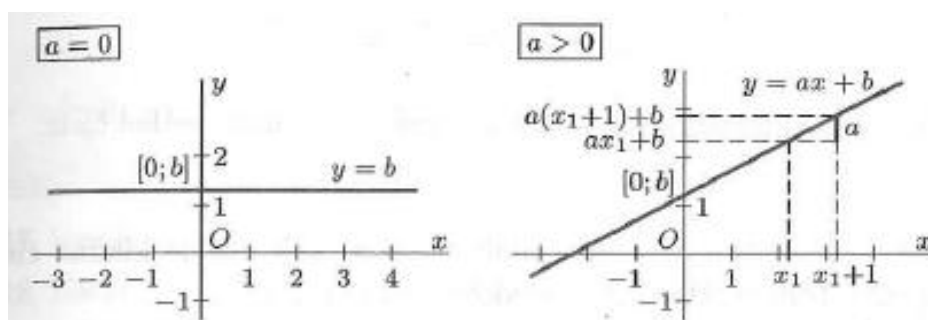


Z více zmíněných definic vyplývá, že pokud je funkce rostoucí nebo klesající, pak je funkce prostá.

Načrtněte graf nějaké funkce, jejíž definiční obor je $\langle -2, 3 \rangle$ a pro kterou platí:

- a) je klesající;
- b) je rostoucí;
- c) je prostá, ale není ani rostoucí, ani klesající;
- d) není prostá.

Lineární funkce je dána předpisem $f: y = ax + b$. Platí, že pokud koeficient $a > 0$, pak je funkce rostoucí. Pokud je koeficient $a < 0$, pak je funkce klesající. V těchto případech je lineární funkce prostá. Pokud je $a = 0$, pak funkce prostá je.



2.17 Uvádějte příklady lineárních funkcí, které jsou rostoucí; klesající.

2.18 Načrtněte graf lineární funkce $y = ax + b$, pro kterou platí:

- a) $a = 0,5$, $b = -1$
- b) $a = -2$, $b = 0,8$

2.19 Pro lineární funkci $y = ax + b$ platí: $b = -3$, funkční hodnota v bodě 2 je rovna 5. Je tato funkce rostoucí, nebo klesající? Vypočítejte a .

2.20 O lineární funkci m je známo, že $m(1) = 1,5$, $m(-2) = -9$. Je m rostoucí, nebo klesající? Vyjádřete ji předpisem $y = ax + b$.

Úlohy k opakování

2.21 Načrtněte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $y = 0,7x + b$ pro $b = 0; -3; -1,5; 1,5; 2$.

2.22 Načrtněte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $y = ax + 3$ pro $a = 0; -2; -4; 1,4; 5$.

2.23 Sestrojte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $k_1: y = 3x - 1$, $k_2: y = x + 4$ a pak řešte tyto úkoly:

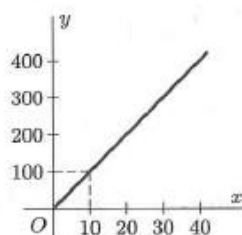
- a) Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $k_1(x) \geq 0$; $k_1(x) < -1$; $k_2(x) < 0$; $k_2(x) \geq 4$.
- b) Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $k_1(x) \geq k_2(x)$; $k_1(x) < k_2(x)$.
- c) Určete z obrázku řešení soustavy rovnic

$$y = 3x - 1$$

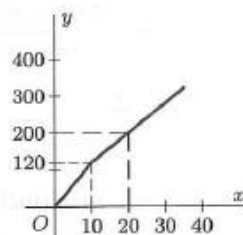
$$y = x + 4$$

s neznámými $x, y \in \mathbb{R}$.

2.24 Závislost ceny y (v Kč) určitého zboží na počtu x kilogramů u dvou prodejců A, B udávají grafy na obr. 2.14a, b.

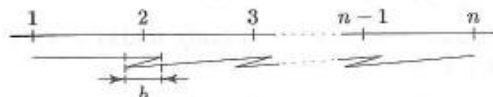


Obr. 2.14a

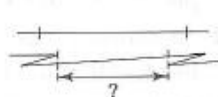


Obr. 2.14b

- a) Popište, jak stanovili prodejci A, B cenu za zboží v závislosti na jeho hmotnosti.
- b) U kterého prodejce je finančně výhodnější nakoupit 8 kg; 10 kg; 20 kg; 25 kg; 40 kg zboží?
- *2.25** Délka záclonové konzoly je 3 metry, na ní je ve stejných vzdálenostech od sebe rozmístěno n háčků (dva jsou upevněny na okrajích). Záclonu zavěšujeme tak, jak je naznačeno na obr. 2.15a. Záclona má šířku z metrů, šířka sklady je b metrů.



Obr. 2.15a



Obr. 2.15b

- a) Vyjádřete, jak závisí z na b a n .
- b) Vypočítejte, jakou šířku má mít záclona, je-li na konzole 26 háčků a chceme-li vytvořit sklady o šířce 0,05 metru. Dále určete, jaká bude v tomto případě vzdálenost mezi dvěma sousedními sklady (viz obr. 2.15b).

2.19 Rostoucí; $a = 4$. **2.20** Rostoucí; $y = 3,5x - 2$. **2.23** a) $x \geq \frac{1}{3}$; $x < 0$; $x < -4$; $x \geq 0$; b) $x \geq 2,5$; $x < 2,5$; c) $x = 2,5$, $y = 6,5$. **2.24** a) U A stojí 1 kg zboží bez ohledu na zakoupené množství 10 Kč; u B jde o „kombinovanou cenu“: do 10 kg je cena za 1 kg zboží 12 Kč, za každý kilogram zboží nad 10 kg zaplatí kupující už jen 8 Kč. b) A; A; A nebo B; B; B. **2.25** a) $z = (n - 2) \cdot 2b + 3$; b) 5,4 m; 0,07 m.

Funkce s absolutními hodnotami

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:

- je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$
- je-li $a \leq 0$, je $|a| = -a$

Příklad 1

Sestrojte graf funkce $y = |x|$.

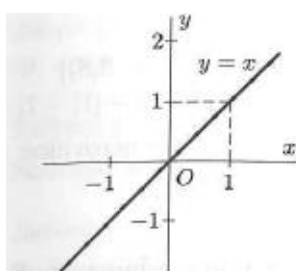
Řešení

Pro každé $x \geq 0$ je $|x| = x$, pro každé $x < 0$ je $|x| = -x$. K sestrojení grafu funkce $y = |x|$ můžeme tedy využít již známé grafy funkcí $y = x$ a $y = -x$ (obr. 3.1a, 3.1b).

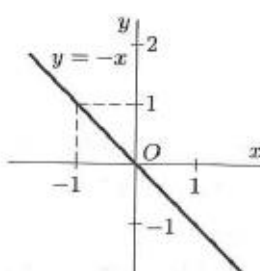
Graf funkce $y = |x|$ se skládá z grafů těchto dvou funkcí (obr. 3.1c)

$$y = x, \quad x \in \langle 0, +\infty \rangle$$

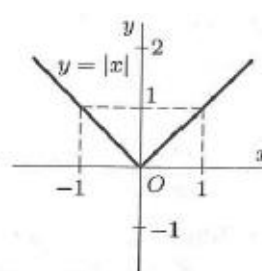
$$y = -x, \quad x \in (-\infty, 0)$$



Obr. 3.1a



Obr. 3.1b



Obr. 3.1c

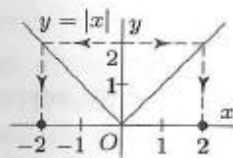
2 Ve kterém intervalu je funkce $y = |x|$ rostoucí a ve kterém intervalu je klesající?

Funkce $y = |x|$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, klesající v intervalu $(-\infty, 0)$.

3 Z grafu funkce $y = |x|$ zjistěte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

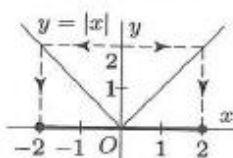
- a) $|x| = 2$ b) $|x| \leq 2$ c) $|x| > 2$

(Můžete postupovat obdobně jako v **1** z článku 2.2.)



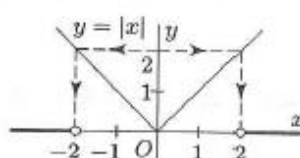
Obr. 3.2a

$$x_1 = -2, x_2 = 2$$



Obr. 3.2b

$$x \in \langle -2, 2 \rangle$$



Obr. 3.2c

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Úlohy

3.1 a) Pro která z čísel $a = 3; -1,5; -13,4; 2, 7$ platí $|a| = -a$?

b) Pro která reálná čísla x je $-x$ kladné číslo?

3.2 Vypočítejte:

- a) $|\sqrt{2}| - |\sqrt{2}|$ b) $|8 - 11| - |3 - 9|$ c) $|-3,5 - (-0,8)|$
 d) $14 - |4,6 - 5,3|$ e) $|-2 - |5 - 7||$ f) $|-|2 - 5| + |1| - 7|$

3.3 S využitím grafu funkce $y = |x|$ řešte v $\mathbb{R}$ tyto rovnice a nerovnice:

- a) $|x| = 1,5$ b) $|x| \geq 1,5$ c) $|x| < 1,5$

3.4 Zdůvodněte tato tvrzení:

- a) Kořeny rovnice $|x| = 1,5$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ jsou všechna taková čísla, jejichž obrazy na ose x leží ve vzdálenosti 1,5 od obrazu čísla 0.
 b) Řešeními nerovnice $|x| \geq 1,5$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ jsou všechna ta čísla, jejichž obrazy na ose x mají od obrazu čísla 0 vzdálenost větší nebo rovnou 1,5.
 c) Řešeními nerovnice $|x| < 1,5$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ jsou všechna taková čísla, jejichž obrazy na ose x leží ve vzdálenosti menší než 1,5 od obrazu čísla 0.

3.5 a) S využitím grafu funkce $y = |x|$ řešte tyto rovnice v $\mathbb{R}$: $|x| = -3$, $|x| = -1,4$, $|x| = -\sqrt{3}$.

b) Zdůvodněte platnost tohoto tvrzení: Pro každé $k < 0$ je množina všech kořenů rovnice $|x| = k$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ prázdná.

3.1 a) $-1,5; -13,4$; b) pro všechna $x < 0$. **3.2** a) 0; b) -3 ; c) $2,7$; d) $13,3$; e) 4 ; f) 9 . **3.3** a) $x_1 = -1,5, x_2 = 1,5$; b) $(-\infty; -1,5) \cup (1,5; +\infty)$; c) $(-1,5; 1,5)$. **3.5** a) Ve všech případech je množina kořenů prázdná; b) pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $|x| \geq 0$.

Funkce s absolutními hodnotami

Sestrojte graf funkce $h: y = |3 - x|$.

Jako první si určíím nulový bod:

$$3 - x = 0$$

$$x = 3$$

Nyní si funkci rozdělím na dva intervaly, pro první z nichž je absolutní hodnota kladná, pro druhý pak záporná. Následně do výrazu uvnitř absolutní hodnoty dosadím libovolnou hodnotu z intervalu.

	$I_1 = (-\infty; 3 >$	$I_2 = (3; \infty)$
$x - 3$	$-$	$+$

Vidíme, že dosazením do výrazu hodnoty z prvního intervalu vyjde záporná hodnota. Pak tedy:

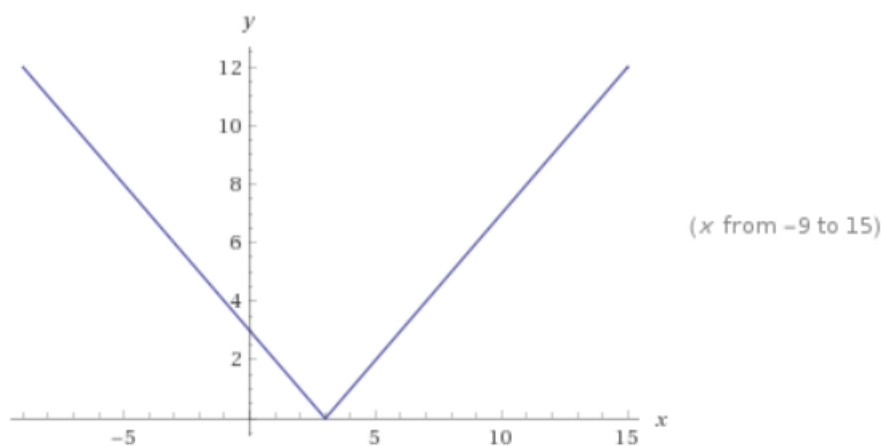
$$h_1: y = -x + 3$$

je podoba funkce pro interval $(-\infty; 3)$. Po dosazení hodnoty z druhého intervalu vyjde kladná hodnota a výraz se nezmění. Pak tedy:

$$h_2: y = x - 3$$

Poznámka: krajní body nezahrnujeme do tabulky, protože by vyšla hodnota výrazu 0, která by nám nic neřekla. Funkce h pak vypadá následovně:

$$h = \begin{cases} h_1: x \in I_1 \\ h_2: x \in I_2 \end{cases}$$



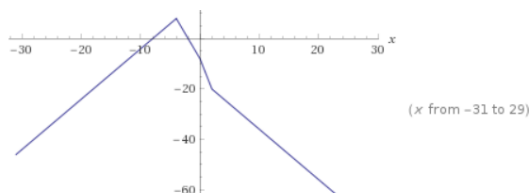
Narýsujte graf $f: y = 2|x-2| - 3|x+4| - |x|$

Nulové body:

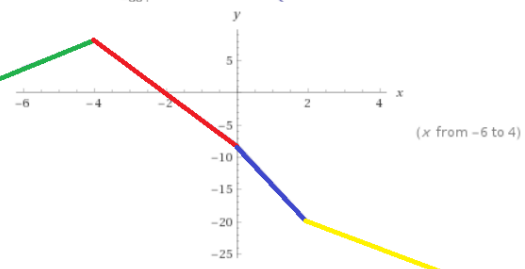
$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$x+4=0 \rightarrow x=-4 \quad \text{v nulových bodech se bude funkce lámat}$$

$$x=0$$



	$(-\infty; -4)$	$(-4; 0)$	$(0; 2)$	$(2; \infty)$
$x-2$	-	-	-	+
$x+4$	-	+	+	+
x	-	-	+	+



Interval $(-\infty; -4)$

$$f: y = -2(x-2) + 3(x+4) + x$$

$$f: y = -2x + 4 + 3x + 12 + x$$

$$f: y = 2x + 16$$

Interval $(-4; 0)$

$$f: y = -2(x-2) - 3(x+4) + x$$

$$f: y = -2x + 4 - 3x - 12 + x$$

$$f: y = -4x - 8$$

Interval $(0; 2)$

$$f: y = -2(x-2) - 3(x+4) - x$$

$$f: y = -2x + 4 - 3x - 12 - x$$

$$f: y = -6x - 8$$

Interval $(2; \infty)$

$$f: y = 2(x-2) - 3(x+4) - x$$

$$f: y = 2x - 4 - 3x - 12 - x$$

$$f: y = -2x - 16$$

x	-8	-4
y	0	8

x	-4	0
y	8	-8

x	0	2
y	-8	-20

x	2	3
y	-20	-22

Úlohy

3.6 Vyjádřete pomocí intervalů definiční obory těchto funkcí:

a) $y = \sqrt{|x| - x}$ b) $y = \sqrt{|x| + x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

3.7 Na obr. 3.3 je graf funkce $y = |3 - x|$. V čem se liší od grafu funkce $y = |x - 3|$? Zdůvodněte své tvrzení.

3.8 Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = |x - 1|$ b) $y = |x + 1,5|$ c) $y = |2 + 0,5x|$
d) $y = |2x|$ e) $y = |x| - 4$ f) $y = 1 - |0,5x|$
g) $y = x + |x|$ h) $y = x - |x|$ i) $y = \frac{|x|}{x}$

3.9 Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = |x|, \quad y = |x| - 4, \quad y = ||x| - 4|.$$

3.10 Sestrojte graf funkce $y = |2 - x|$. Pomocí něho pak zjistěte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

a) $|2 - x| = 1$ b) $|2 - x| \leq 1$ c) $|2 - x| > 1$

3.11 Řešte graficky tyto rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $|x| - 1 = -|x - 1| + 1$ b) $|x| - 1 \leq -|x - 1| + 1$
c) $|x| - 1 > -|x - 1| + 1$ d) $|x| - 1 \geq -|x - 1| + 1$

3.12 Načrtněte grafy následujících funkcí; z grafů pak popište, ve kterých intervalech jsou funkce rostoucí, resp. klesající:

- a) $y = |x + 3| - |x - 3|$
 b) $y = 2 \cdot |x + 1| - 3 \cdot |x - 1|$
 c) $y = |1 - x| - 2 \cdot |x| + |2 - x|$
 d) $y = |x - 3| - |5 - 2x| + 3 \cdot |1 - x|$

*3.13 Řešte graficky tyto rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- a) $|x + 1| - |x| + 3 \cdot |x - 1| - 2 \cdot |x - 2| = x + 2$
 b) $x - |x + 2| < |x - 3| - 3$
 c) $|x - 2| - 2 \cdot |x - 1| + |x - 4| > x - |2x - 5| + 1$

3.14 Určete všechna $t \in \mathbb{R}$, pro která rovnice $|x + 5| - 2 = t$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$

- a) má dva navzájem různé kořeny,
 b) má právě jeden kořen,
 c) nemá žádný kořen.

3.6 a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $(0, +\infty)$.
 3.7 Graf funkce $y = |x - 3|$ je též grafem funkce $y = |3 - x|$, neboť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $|x - 3| = |3 - x|$. 3.10 a) $x_1 = 1, x_2 = 3$; b) $x \in \langle 1, 3 \rangle$; c) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. 3.11 a) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$; b) $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$; c) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$; d) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$. 3.12 a) $y = -6, x \in (-\infty, -3), y = 2x, x \in \langle -3, 3 \rangle, y = 6, x \in \langle 3, +\infty \rangle$; b) $y = x - 5, x \in (-\infty, -1), y = 5x - 1, x \in \langle -1, 1 \rangle, y = -x + 5, x \in \langle 1, +\infty \rangle$; c) $y = 3, x \in (-\infty, 0), y = -4x + 3, x \in \langle 0, 1 \rangle, y = -2x + 1, x \in \langle 1, 2 \rangle, y = -3, x \in \langle 2, +\infty \rangle$; d) $y = -2x + 1, x \in (-\infty, 1), y = 4x - 5, x \in \langle 1, 2.5 \rangle, y = 5, x \in \langle 2.5, 3 \rangle, y = 2x - 1, x \in \langle 3, +\infty \rangle$. 3.13 a) $x \in \{-2\} \cup \langle 2, +\infty \rangle$; b) $x \in (-\infty, 2) \cup \langle 4, +\infty \rangle$; c) $x \in (-\infty, \frac{12}{7}) \cup \langle 10, +\infty \rangle$. 3.14 a) $t \in (-2, +\infty)$; b) $t = -2$; c) $t \in (-\infty, -2)$.

Nakreslete grafy funkcí:

$$f_1: y = |x|$$

$$f_2: y = |x| + 2$$

$$f_3: y = |x + 2|$$

$$f_4: y = |x + 2| - 3$$

$$h_1: y = 2|x|$$

$$h_2: y = 2|x - 3| + 1$$

Načrtněte grafy funkcí:

$$a) y = x + \sqrt{x^2}$$

Výsledky najdete po zadání na www.wolframalpha.com ve formátu např. f_2 : plot abs(x)+2 nebo funkce $y = x + \sqrt{x^2}$ ve formátu plot x+sqrt(x^2).