Obor reálných čísel $\mathbb{R}$

V oboru racionálních čísel je možné bez omezení sčítat, násobit i dělit číslem různým od nuly. Je také možné umocňovat libovolným přirozeným mocnitelem. V oboru $\mathbb{Q}$ však není možné bez omezení odmocňování kladných čísel, např. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$. Proto obor racionálních čísel rozšiřujeme na obor **reálných čísel** $\mathbb{R}$.

<u>Definice:</u> Reálná čísla jsou jednak racionální čísla, která se dají vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, a dále iracionální čísla, jež nelze vyjádřit v tomto tvaru.

Příklady iracionálních čísel: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ (Ludolfovo číslo – vyjadřuje podíl délky libovolné kružnice a jejího průměru).

Vyjádření reálných čísel desetinnými rozvoji

Každé iracionální číslo je vyjádřeno právě jedním nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem. Všechny cifry, které vyjadřují iracionální číslo, není možné vypsat.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562 \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 808 \ldots$$

Zaokrouhlování reálného čísla

Zaokrouhlování reálného čísla a v desetinným rozvojem na jednotku (místo) řádů n se provádí podle těchto pravidel zaokrouhlování:

1. V desetinném rozvoji čísla a vynecháme všechny číslice řádu nižších než n, tj. číslice vpravo od číslice řádu n, jsou-li za desetinnou čárkou a v celém čísle a tyto číslice nahradíme nulami.
2. Je-li první z vynechaných číslic (řádu $n-1$)
    a. $1, 2, 3, 4$, pak poslední ponechaná číslice (řádu n) se nemění,
    b. $5, 6, 7, 8, 9$, pak poslední ponechaná číslice se zvětší o 1

Příklady zaokrouhlování čísel:

$36{,}784 \doteq 36{,}8$ zaokrouhleno na desetiny

$36{,}784 \doteq 36{,}78$ zaokrouhleno na setiny

$25\ 638 \doteq 25\ 600$ zaokrouhleno na stovky

$25\ 638 \doteq 25\ 640$ zaokrouhleno na desítky

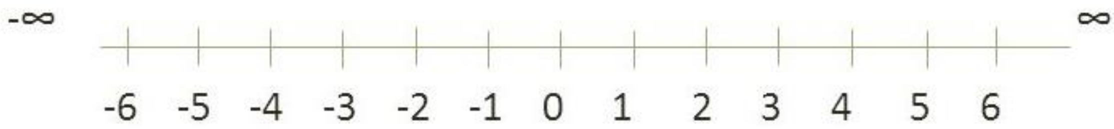
$\pi \doteq 3{,}14$ zaokrouhleno na setiny

$\pi \doteq 3{,}142$ zaokrouhleno na tisíciny

Příklady: Středoškolská matematika v úlohách I, Polák, str. 59-60, cvičení 18, 19, 20, 21

Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

1. Zvolíme přímku o a na ní dva různé body O, J.
2. Bod O se nazývá počátek, prohlásíme ho za obraz čísla 0
3. Bod J se nazývá jednotkový bod, prohlásíme ho za obraz čísla 1
4. Přímce o se říká číselná osa
5. Polopřímce OJ se říká kladná poloosa
6. Polopřímce opačné k oj se říká záporná poloosa



Číslo opačné: Opačné číslo k číslu x označuje takové číslo, které po přičtení k x dává jako výsledek 0. Opačné číslo k číslu x se označuje jako $-x$; jedná se tedy o číslo, které se od původního čísla liší právě ve znaménku. Platí tedy, že $x + (-x) = 0$.

Číslo převrácené: převrácená (neboli reciproká) hodnota čísla x označuje to číslo, které po vynásobení číslem x dává jako výsledek 1. Převrácená hodnota čísla x se označuje jako $\frac{1}{x}$ nebox^{-1}. Platí tedy, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Příklady: Středoškolská matematika v úlohách I, Polák, str. 63-64, cvičení 39, 40, 41, 42, 43, 44

U příkladu č. 44 využij konstrukci odmocniny pomocí *Euklidova šneka* na str. 56, cvičení 2

Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnota reálného čísla a se značí $|a|$ a je definovaná takto:

$$|a| = \begin{cases} a, je - li\ a \geq 0 \\ -a, je - li\ a < 0 \end{cases}$$

Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné. Některé důležité vlastnosti absolutní hodnoty:

Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a \pm b| \leq |a| \pm |b|$ **TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST**
4. $|a \pm b| \geq |a| - |b|$
5. $|a - b| = |b - a|$
6. $|ab| = |a||b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, pro\ b \neq 0$

Geometrický význam absolutních hodnot reálných čísel: Na číselné ose představuje $|a|$ vzdálenost obrazu a od počátku, $|a-b|$ vzdálenost obrazů čísel a, b.

Věty o absolutních hodnotách součtu a součinu lze rozšířit na libovolných n reálných sčítanců, resp činitelů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|$$

Příklady: Středoškolská matematika v úlohách I, Polák, str. 64-67, cvičení 46, 47, 48, 49, 52, 54, 58, 66, 67

Úvod do množin

Definice: Množina je soubor libovolných navzájem různých objektů, jenž je chápán jako jeden celek. K označení množin se používají velká latinská písmena: A, B, C, …

Pokud chceme napsat, že prvek a náleží množině A: $a \in A$; prvek a nenáleží množině A: $a \notin A$.

Způsoby zadání množin:

Výčtem prvků: $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Charakteristickou vlastností: $M = \{x \in N; (x > 6) \wedge (x < 10)\}$ … $M = \{7; 8; 9\}$

Množinové vztahy a množinové operace

Název a symbolické označení	Definice (slovní a symbolické vyjádření)
Inkluze množin A, B: množina A je podmnožinou (částí) množiny B Symbolický zápis: $A \subseteq B$	Množina A je podmnožinou množiny B, právě když platí, že každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B. Tedy: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U; x \in A \Rightarrow x \in B)$
Rovnost množin A, B: množina A se rovná množině B Symbolický zápis: $A = B$	Množiny A, B jsou si rovny, právě když platí, že $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$. Tedy: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U; x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Ostrá inkluze množin A, B: množina A je vlastní podmnožinou množiny B Symbolický zápis: $A \subsetneq B$, popřípadě $A \subset B$	Množina A je vlastní podmnožinou množiny B, právě když je $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$

Definice sjednocení, průniku a rozdílu množin

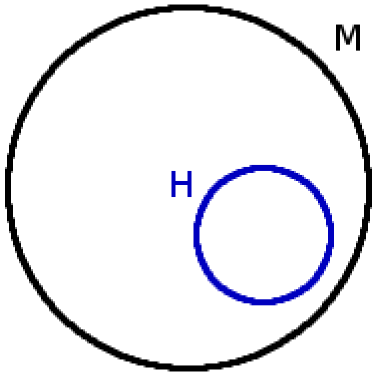
Sjednocení množin A, B označované $A \cup B$	Sjednocení $A \cup B$ množin A,B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Tedy: $A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$
Průnik množin A, B označovaný $A \cap B$	Průnik $A \cap B$ množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň do množiny B. Tedy: $A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$
Rozdíl množin A, B označovaný $A \setminus B$	Rozdíl $A \setminus B$ množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B. Tedy: $A \setminus B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$

Disjunktní množiny: Řekneme, že dvě množiny jsou disjunktní, pokud mají prázdný průnik, tedy nemají žádný společný prvek.

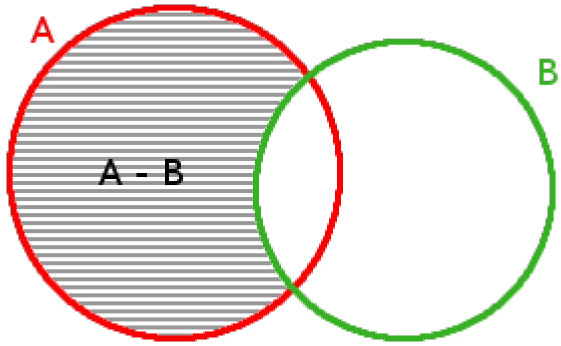
Prázdná množina: $\emptyset$, množina, která neobsahuje žádný prvek.

Konečná množina: Množina, která má konečný počet prvků. Pokud množina není konečná, je **nekonečná**.

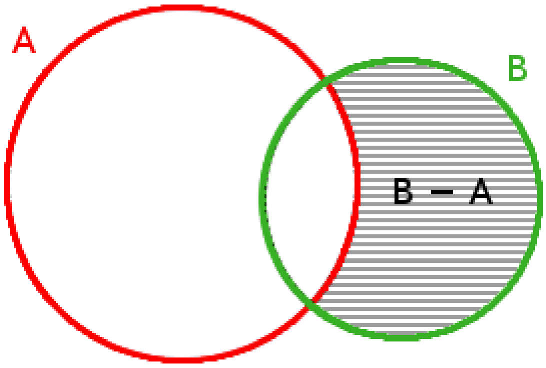
Grafické znázornění množin se provádí pomocí tzv. Vennovych diagramů.



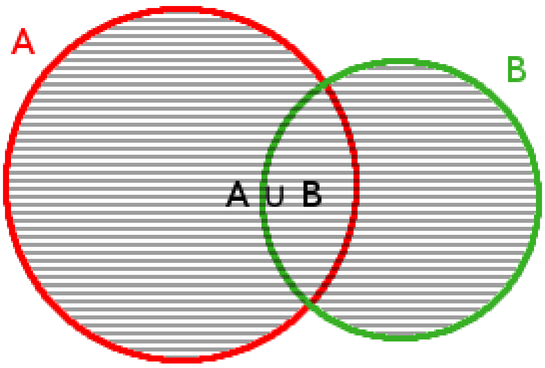
$H \subseteq M$



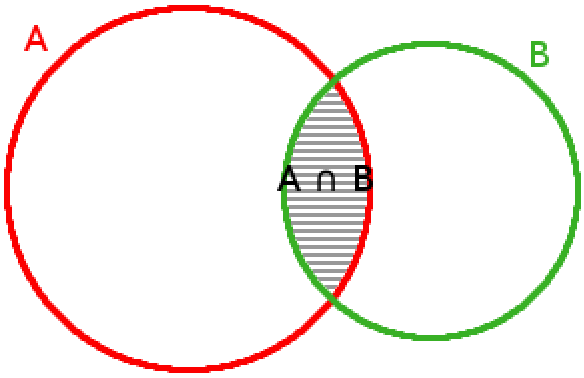
$A \setminus B$



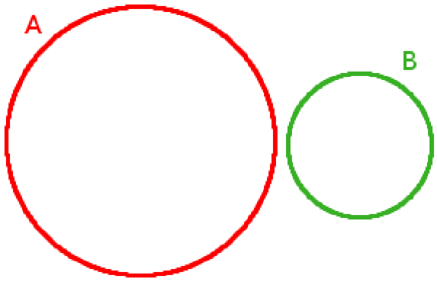
$B \setminus A$



$A \cup B$



$A \cap B$



Dvě disjunktní množiny

Příklady: PDF 3. cvičení - množiny

Intervaly

Definice: ***Interval je každá množina reálných čísel, jejichž obrazy na číselné ose vyplňují její souvislou podmnožinu.***

Libovolný bod intervalu, který není jeho krajním bodem, se nazývá vnitřní bod intervalu. Pro kterýkoliv omezený interval I s krajními body $a, b, a < b$ se zavádí pojem délka intervalu, tj. číslo $d(I) = b - a$. Dále střed intervalu $s(I) = \frac{1}{2}(a + b)$. Krajním bodům intervalu se říká meze intervalu (horní, dolní).

Druhy intervalů množiny $\mathbb{R}$

Názvy intervalů	Označení	Definice Množina všech reálných čísel x, pro která platí:	Grafické znázornění na číselné ose
Intervaly omezené s krajními body a, b $(a < b)$			
Uzavřený interval	$\langle a, b\rangle$	$a \leqq x \leqq b$	a b
Otevřený interval	(a, b)	$a < x < b$	a b
Polouzavřené (polootevřené) intervaly	$\langle a, b)$	$a \leqq x < b$	a b
	$(a, b\rangle$	$a < x \leqq b$	a b
Intervaly neomezené (zprava, resp. **zleva)** s krajním bodem a	$\langle a, +\infty)$	$x \geqq a$	a
	$(a, +\infty)$	$x > a$	a
	$(-\infty, a\rangle$	$x \leqq a$	a
	$(-\infty, a)$	$x < a$	a
Interval oboustranně neomezený (množina R)	$(-\infty, +\infty)$	$x \in$ R	R

Příklady: Středoškolská matematika v úlohách I, Polák, str. 68-69, cvičení 71, 72, 73, 74, 75, 76
PDF 3. cvičení - intervaly